Über die Glättung statistischer Verteilungsreihen

Inaugural-Dissertation

der

philosophischen Fakultät II der Universität Bern
zur Erlangung der Doktorwürde

vorgelegt von

MICHAEL FAESI
(Zürich)

Gedruckt bei Stämpfli & Cie., Bern
1940

Über die Glättung statistischer Verteilungsreihen

Inaugural-Dissertation

der

philosophischen Fakultät II der Universität Bern
zur Erlangung der Doktorwürde

vorgelegt von

MICHAEL FAESI
(Zürich)

Gedruckt bei Stämpfli & Cie., Bern
1940

Von der philosophischen Fakultät II auf Antrag des Herrn Prof. Dr. *A. Alder* angenommen.

Bern, den 22. Februar 1940.

Der Dekan:
Prof. *H. Greinacher.*

R. UNIV. BIBLIOTHEEK LEIDEN

An dieser Stelle möchte ich allen meinen Lehrern, den Herren Professoren *Friedli* †, *Alder*, *Bohren*, *Crelier* †, *Scherrer*, *Hadwiger*, *Michel*, *Amonn* und *König* für die mir während meines Studiums erwiesenen Anregungen meinen besten Dank aussprechen.

Ganz besonders fühle ich mich meinem verehrten Lehrer, Herrn Prof. *Hadwiger*, zu Dank verpflichtet. Seine reichen Anregungen und wertvollen Unterstützungen ermöglichten die Entstehung und Durchführung der vorliegenden Arbeit.

Inhalt

Seite

Einleitung 1

§ 1. Die statistische Verteilungsreihe. Schiebungs- und Glättungsoperationen 2

§ 2. Der Grenzübergang für die Elementarreihe 10

§ 3. Das asymptotische Verhalten der Polynomialkoeffizienten 19

§ 4. Die Glättung der allgemeinen normierten Verteilungsreihe 22

Über die Glättung statistischer Verteilungsreihen.

Von *M. Faesi*, Bern.

Einleitung.

Um grobe Unregelmässigkeiten in statistischen Zahlenreihen abzuschwächen, wird gelegentlich so verfahren, dass man jedes Element der Reihe durch das arithmetische Mittel der Elemente einer symmetrischen Nachbarschaft ersetzt. Diesen Prozess nennt man *Glättung* der statistischen Reihe.

Soll die Definition der Glättungsoperation überall einheitlich ausfallen, so muss jedes Element der Reihe eine symmetrische Nachbarschaft aufweisen, das heisst die Reihe darf keinen Anfang und kein Ende besitzen. Es ist aus diesem Grunde zweckmässig, nur statistische Zahlenreihen zu betrachten, die beidseitig unbegrenzt sind. Diese Festsetzung bedeutet keine wesentliche Einschränkung der Gesamtheit der zugelassenen Reihen, denn eine endliche Reihe kann formal durch Hinzufügen von Nullen zu einer beidseitig unbegrenzten Reihe erweitert werden.

Wesentlicher ist die Voraussetzung, dass die aus den Zahlen der statistischen Reihe gebildete unendliche Reihe konvergiert. Wenn die Summe der Reihe 1 beträgt, so nennen wir die statistische Reihe *normiert*. Die Auszeichnung, welche die normierte statistische Reihe in den folgenden Untersuchungen erfährt, hängt mit der Interpretationsmöglichkeit als diskontinuierliche Wahrscheinlichkeitsverteilung zusammen. Besonders beachte man den Umstand, dass die Normiertheit eine in bezug auf die Glättungsoperation invariante Eigenschaft darstellt.

Solche normierte statistische Reihen werden nun der mehrfach iterierten Glättung unterworfen. Verschiedene sich hier aufdrängende Fragen abzuklären, ist das Ziel der vorliegenden Arbeit. Insbesondere wird das asymptotische Verhalten der geglätteten Reihe bei unbegrenzt fortgesetzter Iteration der Glättungsoperation Gegenstand ein-

gehender Untersuchungen sein. Das Hauptresultat ist ein Konvergenzsatz, wonach die die geglätteten Reihen treppenförmig interpolierenden Verteilungsfunktionen bei geeigneter Maßstabsänderung mit unendlich wachsendem Iterationsindex gleichmässig gegen die Gaußsche Verteilungsfunktion konvergieren.

Dieses Ergebnis stellt das diskontinuierliche Analogon zu einem Grenzwertsatz von L. Maurer [1]) dar. Beide Resultate hängen aufs engste mit den Fundamentalsätzen der Wahrscheinlichkeitsrechnung zusammen, über die man etwa bei R. von Mises [2]) nachlesen kann. Der Nachweis des oben erwähnten Konvergenzsatzes wurde absichtlich unabhängig von den Fundamentalsätzen durchgeführt.

Problemstellung und Ergebnis der folgenden Arbeit haben keine unmittelbare Beziehung zu der praktischen Aufgabe, welche die Glättung der statistischen Reihe innerhalb der Statistik zu erfüllen hat. Das Hauptinteresse ist auf die Entwicklung des Formalismus gerichtet, wobei die symbolische Betrachtungsweise stark betont ist.

§ 1.

Die statistische Verteilungsreihe. Schiebungs- und Glättungsoperationen.

1. Gegenstand unserer Untersuchungen ist eine *statistische Verteilungsreihe*

$$\ldots, A_{-2}, A_{-1}, A_0, A_1, A_2, \ldots, \tag{1}$$

die abkürzend mit

$$\alpha = \{A_\lambda\}, -\infty < \lambda < \infty \tag{2}$$

bezeichnet wird und folgende Forderungen erfüllt:

a) Die Reihe ist *nicht negativ*, d. h. es gilt

$$A_\lambda \geqq 0 . \tag{3}$$

---

[1]) L. Maurer: Über die Mittelwerte der Funktionen einer reellen Variablen. Math. Ann. 47 (1896), S. 263—280.

[2]) R. von Mises: Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung in der Statistik und theoretischen Physik. Leipzig und Wien, 1931, S. 197 ff.

b) Die Reihe ist *normiert*, d. h. es ist

$$\sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} A_\lambda = 1 . \tag{4}$$

Die Konvergenz der angeschriebenen unendlichen Reihe ist in die Voraussetzung mit eingeschlossen.

Eine spezielle normierte Verteilungsreihe ist die *Elementarreihe*

$$\varepsilon = \{E_\lambda\} , \tag{5}$$

die definiert ist durch

$$E_\lambda = \begin{cases} 1 \text{ für } \lambda = 0 \\ 0 \text{ für } \lambda \gtrless 0 . \end{cases} \tag{6}$$

Wir definieren noch die *lineare Komposition* von Verteilungsreihen

$$a\alpha + b\beta = \gamma \tag{7}$$

durch

$$\alpha = \{A_\lambda\} , \quad \beta = \{B_\lambda\} , \quad \gamma = \{a A_\lambda + b B_\lambda\} , \tag{8}$$

wenn $a \geqq 0$, $b \geqq 0$ und $a + b = 1$ ist.

2. Unter der *Verschiebung nach rechts*, ausgeübt auf $\alpha = \{A_\lambda\}$, verstehen wir den Übergang zur Reihe

$${}_1\alpha = \{{}_1A_\lambda\} , \quad \text{wo} \quad {}_1A_\lambda = A_{\lambda-1} \quad \text{ist.} \tag{9}$$

Symbolisch deuten wir diese Operation an durch

$$S(\alpha) = {}_1\alpha . \tag{10}$$

Analog verstehen wir unter der *Verschiebung nach links* den Übergang zur Reihe

$${}_{-1}\alpha = \{{}_{-1}A_\lambda\} , \quad \text{wo} \quad {}_{-1}A_\lambda = A_{\lambda+1} \quad \text{ist} \tag{11}$$

oder symbolisch

$$S^{-1}(\alpha) = {}_{-1}\alpha . \tag{12}$$

Weiter treffen wir die Festsetzung

$$S^0(\alpha) = \alpha\,. \tag{13}$$

Durch die Rekursionsbeziehung

$$S\,[S^n(\alpha)] = S^{n+1}(\alpha)\,, \quad S^{-1}\,[S^{-n}(\alpha)] = S^{-(n+1)}(\alpha) \tag{14}$$

für $n \geqq 0$ wird $S^m(\alpha)$ für alle positiven oder negativen m definiert. Die Richtigkeit der Gleichung

$$S^m\,[S^n(\alpha)] = S^{m+n}(\alpha) \tag{15}$$

für beliebige, ganzzahlige m und n ist ohne weiteres ersichtlich. Ebenso genügt der Operator S dem distributiven Gesetze, d. h. es gilt

$$S(a\alpha + b\beta) = a\,S(\alpha) + b\,S(\beta)\,, \tag{16}$$

wo $a \geqq 0\,,\ b \geqq 0\,,\ a + b = 1$ ist.

3. Unter der ersten *Glättung* der Reihe $\alpha = \{A_\lambda\}$ verstehen wir die Reihe

$$\alpha^1 = \{A_\lambda^1\}\,, \tag{17}$$

wo

$$A_\lambda^1 = \frac{A_{\lambda-k} + A_{\lambda-k+1} + \ldots + A_{\lambda+k}}{2k+1}\,. \tag{18}$$

Dabei sei k als ganze, feste Zahl $\geqq 1$ vorausgesetzt, die wir *Glättungsparameter* nennen wollen. Symbolisch deuten wir die erste Glättung von α an durch

$$G(\alpha) = \alpha^1\,. \tag{19}$$

Wir treffen die Festsetzung

$$G^0(\alpha) = \alpha\,. \tag{20}$$

Die Rekursion

$$G\,[G^n(\alpha)] = G^{n+1}(\alpha) \tag{21}$$

für $n \geqq 0$ definiert $G^m(\alpha)$ für alle ganzzahligen $m > 0$. Bedeuten weiter m und n nicht negative, ganze Zahlen, so gilt

$$G^m [G^n(\alpha)] = G^{m+n}(\alpha) . \tag{22}$$

Zudem genügt schliesslich der Operator G dem distributiven Gesetze, d. h. es ist

$$G(a\alpha + b\beta) = a\,G(\alpha) + b\,G(\beta) , \tag{23}$$

wobei $a \geqq 0$, $b \geqq 0$ und $a + b = 1$.

Die Operatoren S und G sind kommutativ, also

$$SG(\alpha) = GS(\alpha) \tag{24}$$

oder allgemein

$$S^m G^n(\alpha) = G^n S^m(\alpha) \tag{25}$$

und führen normierte Zahlenreihen in ebensolche über, d. h. es ist auch

$$\sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} {}_n A_\lambda = 1 \quad \text{und} \quad \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} A_\lambda^n = 1 . \tag{26}$$

4. Es lässt sich nun jede statistische Zahlenreihe α durch die folgende formale Reihenentwicklung darstellen:

$$\alpha = \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} A_\lambda\, S^\lambda(\varepsilon) . \tag{27}$$

Dann gilt für die n-fach geglättete Reihe α^n auf Grund der oben abgeleiteten Eigenschaften des Operators G

$$G^n(\alpha) = \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} A_\lambda\, S^\lambda\, G^n(\varepsilon) . \tag{28}$$

Aus diesem Ansatz für $G^n(\alpha)$ geht hervor, dass wir uns zur Untersuchung der n-ten Glättung der Reihe α zunächst mit der n-ten Glättung der Elementarreihe befassen müssen und dann die formal

angeschriebene Reihenentwicklung auszuwerten haben. Bevor wir uns aber dem speziellen Studium der Elementarreihe zuwenden, sind noch zwei wichtige Begriffe zu definieren.

5. Verteilungsreihe und zugeordnete *Verteilungsfunktion.* Die zur normierten Verteilungsreihe

$$\alpha = \{A_\lambda\}, \quad \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} A_\lambda = 1 \tag{29}$$

zugeordnete Verteilungsfunktion mit der Präzision $\omega > 0$ ist definiert durch

$$\varphi_\omega [\alpha, x] = \omega A_\lambda, \quad \left(\lambda - \frac{1}{2}\right)\frac{1}{\omega} \leqq x < \left(\lambda + \frac{1}{2}\right)\frac{1}{\omega}, \tag{30}$$

$$(\lambda = 0,\ 1,\ -1,\ 2,\ -2,\ \ldots).$$

Es gilt das distributive Gesetz

$$\varphi_\omega [a\alpha + b\beta, x] = a\, \varphi_\omega [\alpha, x] + b\, \varphi_\omega [\beta, x] \tag{31}$$

für $a \geqq 0, \quad b \geqq 0, \quad a + b = 1.$

Die der verschobenen Verteilungsreihe $S^n(\alpha) = \{{}_nA_\lambda\}$ zugeordnete Verteilungsfunktion lässt sich folgendermassen darstellen:

$$\varphi_\omega [S^n(\alpha), x] = \omega\, {}_nA_\lambda, \quad \left(\lambda - \frac{1}{2}\right)\frac{1}{\omega} \leqq x < \left(\lambda + \frac{1}{2}\right)\frac{1}{\omega},$$

$$\varphi_\omega [S^n(\alpha), x] = \omega\, A_{\lambda-n}, \left(\lambda - \frac{1}{2}\right)\frac{1}{\omega} \leqq x < \left(\lambda + \frac{1}{2}\right)\frac{1}{\omega}.$$

Durch die Substitution $\lambda \to \lambda + n$ geht die letzte Zeile über in

$$\varphi_\omega [S^n(\alpha), x] = \omega\, A_\lambda, \left(\lambda + n - \frac{1}{2}\right)\frac{1}{\omega} \leqq x < \left(\lambda + n + \frac{1}{2}\right)\frac{1}{\omega},$$

$$\varphi_\omega [S^n(\alpha), x] = \omega\, A_\lambda, \left(\lambda - \frac{1}{2}\right)\frac{1}{\omega} \leqq x - \frac{n}{\omega} < \left(\lambda + \frac{1}{2}\right)\frac{1}{\omega}$$

und dies lässt sich auch schreiben als

$$\varphi_\omega [S^n(\alpha), x] = \varphi_\omega \left[\alpha, x - \frac{n}{\omega}\right]. \tag{32}$$

Für die der geglätteten Verteilungsreihe $G^n(\alpha) = \{A_\lambda^n\}$ zugeordnete Verteilungsfunktion findet man ähnlich

$$\varphi_\omega [G^n(\alpha), x] = \omega A_\lambda^n, \quad \left(\lambda - \frac{1}{2}\right)\frac{1}{\omega} \leqq x < \left(\lambda + \frac{1}{2}\right)\frac{1}{\omega}.$$

Formal kann dies auch so dargestellt werden:

$$\varphi_\omega [G^n(\alpha), x] = \varphi_\omega \left[\sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} A_\lambda S^\lambda G^n(\varepsilon), x\right],$$

$$\varphi_\omega [G^n(\alpha), x] = \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} A_\lambda \varphi_\omega [S^\lambda G^n(\varepsilon), x]$$

oder

$$\varphi_\omega [G^n(\alpha), x] = \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} A_\lambda \varphi_\omega \left[G^n(\varepsilon), x - \frac{\lambda}{\omega}\right]. \tag{33}$$

Insbesondere gilt noch infolge der Normierung

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_\omega [\alpha, x]\, dx = 1 \tag{34}$$

und allgemein

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_\omega [G^n(\alpha), x]\, dx = 1. \tag{35}$$

6. Die zugeordnete *Hilfsfunktion*. Wir definieren die zur Reihe $\alpha = \{A_\lambda\}$ zugeordnete Hilfsfunktion durch

$$F(z) = \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} A_\lambda \cdot z^\lambda. \tag{36}$$

Dabei machen wir hier über die Reihe $\{A_\lambda\}$ noch die Voraussetzung, dass es ein $\varrho > 0$ gibt, so dass

$$\frac{1}{\limsup\limits_{\lambda \to \infty} \sqrt[\lambda]{A_\lambda}} = R > \varrho\,, \qquad \frac{1}{\limsup\limits_{\lambda \to \infty} \sqrt[\lambda]{A_{-\lambda}}} = \frac{1}{r} > \frac{1}{\varrho} \tag{37}$$

ausfällt. In diesem Falle ist nämlich die Funktion $F(z)$ in einem Kreisringgebiet $0 < r < |z| < R$, das den Kreis vom Radius ϱ $(r < \varrho < R)$ enthält, regulär und wird dort durch die Laurentsche Reihenentwicklung, wie oben angegeben, dargestellt.

Wegen der Voraussetzung $\sum\limits_{\lambda=-\infty}^{\infty} A_\lambda = 1$ ist speziell $R \geqq 1$ und $r \leqq 1$. Die obigen Ungleichungen sind ohne weiteres erfüllt bei endlichen Reihen $(r = 0,\ R = \infty)$, sowie bei links, bzw. rechts abbrechenden Reihen $(r = 0,\ R \geqq 1$, bzw. $r \leqq 1,\ R = \infty)$.

Auf Grund der Definition besteht eine eineindeutige Zuordnung zwischen statistischer Zahlenreihe und zugeordneter Hilfsfunktion

$$\alpha \longleftrightarrow F(z)\,. \tag{38}$$

Der Reihe $S(\alpha)$ entspricht die Hilfsfunktion

$$S(\alpha) \longleftrightarrow z \cdot F(z) \tag{39}$$

und allgemein

$$S^n(\alpha) \longleftrightarrow z^n \cdot F(z) \tag{40}$$

und der Reihe $G(\alpha)$ die Hilfsfunktion

$$G(\alpha) \longleftrightarrow \left(\frac{z^{-k} + z^{-k+1} + \ldots + z^k}{2k+1}\right) F(z)\,. \tag{41}$$

Allgemein

$$G^n(\alpha) \longleftarrow \left(\frac{z^{-k} + z^{-k+1} + \ldots + z^k}{2k+1}\right)^n F(z). \tag{42}$$

Infolge der gemachten Voraussetzungen kann die Funktion

$$\left(\frac{z^{-k} + z^{-k+1} + \ldots + z^k}{2k+1}\right)^n F(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_\lambda^n z^\lambda \tag{43}$$

nach Laurent entwickelt werden, wobei sich die Koeffizienten berechnen lassen durch

$$A_\lambda^n = \frac{1}{2\pi i} \overset{(C)}{\oint} \left(\frac{z^{-k} + z^{-k+1} + \ldots + z^k}{2k+1}\right)^n \frac{F(z)}{z^{1+\lambda}}\, dz,$$

$$A_\lambda^n = \frac{1}{2\pi i} \overset{(C)}{\oint} \left(\frac{1}{2k+1}\right)^n \left(\frac{z^{k+\frac{1}{2}} - z^{-(k+\frac{1}{2})}}{z^{\frac{1}{2}} - z^{-\frac{1}{2}}}\right)^n \frac{F(z)}{z^{1+\lambda}}\, dz, \tag{44}$$

wo C einen den Nullpunkt umschliessenden Kreis vom Radius ϱ, $r < \varrho < R$, bedeutet.

Für die Elementarreihe ε ist insbesondere

$$F(z) = \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} E_\lambda z^\lambda = 1 \quad \text{und deshalb}$$

$$E_\lambda^n = \frac{1}{2\pi i} \overset{(C)}{\oint} \left(\frac{1}{2k+1}\right)^n \left(\frac{z^{k+\frac{1}{2}} - z^{-(k+\frac{1}{2})}}{z^{\frac{1}{2}} - z^{-\frac{1}{2}}}\right)^n \frac{dz}{z^{1+\lambda}}. \tag{45}$$

Wählen wir $\varrho = 1$, integrieren also längs des Einheitskreises, so gewinnen wir durch die Substitution $z = e^{i\theta}$ das Integral

$$E_\lambda^n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)\theta}{(2k+1)\sin\frac{\theta}{2}}\right]^n (\cos\lambda\theta - i\sin\lambda\theta)\, d\theta. \tag{46}$$

Der Imaginärteil dieses Integrals verschwindet. Ersetzen wir noch θ durch 2θ, so erhalten wir

$$E_\lambda^n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\sin (2k+1)\theta}{(2k+1) \sin \theta} \right]^n \cos 2\lambda\theta \cdot d\theta . \tag{47}$$

Damit haben wir für die Glieder der n-fach geglätteten Elementarreihe eine Integraldarstellung gefunden.

§ 2.

Der Grenzübergang für die Elementarreihe.

1. Nach Definition ist die der n-fach geglätteten Elementarreihe zugeordnete Verteilungsfunktion gegeben durch

$$\varphi_\omega [\varepsilon^n, x] = \omega E_\lambda^n, \left(\lambda - \frac{1}{2}\right)\frac{1}{\omega} \leqq x < \left(\lambda + \frac{1}{2}\right)\frac{1}{\omega} .$$

Unter Verwendung der Integraldarstellung für E_λ^n geht diese Gleichung über in

$$\varphi_\omega [\varepsilon^n, x] = \frac{2\omega}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\sin (2k+1)\theta}{(2k+1) \sin \theta} \right]^n \cos 2\lambda\theta \cdot d\theta ,$$

$$\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)\frac{1}{\omega} \leqq x < \left(\lambda + \frac{1}{2}\right)\frac{1}{\omega} .$$

Es bedeute $[\![a]\!]$ die Gaußsche Klammer, d. h. die grösste ganze Zahl $\leqq a$. Dann ist für $\omega = \sqrt{n}$

$$\varphi_{\sqrt{n}} [\varepsilon^n, x] = \frac{2\sqrt{n}}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} K^n(\theta) \cos 2 \left[\!\!\left[\sqrt{n}\, x + \frac{1}{2} \right]\!\!\right] \theta \cdot d\theta , \tag{1}$$

wobei abkürzend

$$K(\theta) = \frac{\sin\,(2k+1)\,\theta}{(2k+1)\,\sin\,\theta} \tag{2}$$

gesetzt wurde.

Zur Berechnung des Integrales (1) setzen wir

$$\psi_n(x) = \frac{2\sqrt{n}}{\pi} \int_0^{\frac{1}{\sqrt[4]{n}}} K^n(\theta)\,\cos\,2\left[\left[\sqrt{n}\,x + \frac{1}{2}\right]\right]\theta \cdot d\theta \tag{3}$$

und

$$\chi_n(x) = \frac{2\sqrt{n}}{\pi} \int_{\frac{1}{\sqrt[4]{n}}}^{\frac{\pi}{2}} K^n(\theta)\,\cos\,2\left[\left[\sqrt{n}\,x + \frac{1}{2}\right]\right]\theta \cdot d\theta\,, \tag{4}$$

wo n so gross gewählt sei, dass

$$\frac{1}{\sqrt[4]{n}} \leqq \frac{\pi}{2\,(2k+1)}\,.$$

Dann ist

$$\varphi_{\sqrt{n}}[\varepsilon^n, x] = \psi_n(x) + \chi_n(x)\,. \tag{5}$$

2. Zur Behandlung der Integrale (3) und (4) ist die genaue Kenntnis von $K(\theta)$ unerlässlich. Wir unterbrechen hier deshalb unsere Ausführungen und wenden uns in diesem Abschnitt dem Studium der Funktion (2) zu.

Durch einige Umformungen [1]) gelangt man zu den beiden folgenden Darstellungen von $K(\theta)$:

---

[1]) Polya-Szegö: Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis, II. Berlin, Springer, 1925, S. 77.
Enzyklopädie der Math. Wissenschaften, 2. Band, 3. Teil, 1. Häfte, S. 36.

$$K(\theta) = \frac{1 + 2\,(\cos 2\theta + \cos 4\theta + \ldots + \cos 2k\theta)}{2k+1}, \qquad (6)$$

$$K(\theta) = \prod_{\nu=1}^{2k} \left(1 - \alpha_\nu^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right), \quad \alpha_\nu = \frac{1}{\sin \frac{\nu\pi}{2(2k+1)}}. \qquad (7)$$

Unter Berücksichtigung der Definitionsgleichung (2) erhalten wir aus (7) durch logarithmische Differentiation

$$\sum_{\nu=1}^{2k} \frac{\alpha_\nu^2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}}{1 - \alpha_\nu^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} = \frac{\sin (2k+1)\,\theta \cos \theta - (2k+1) \sin \theta \cos (2k+1)\theta}{\sin (2k+1)\,\theta \cdot \sin \theta}.$$

Dividiert man diese Gleichung durch $\sin \frac{\theta}{2}$ und führt dann den Grenzübergang $\theta \to 0$ durch, so gewinnt man

$$\sum_{\nu=1}^{2k} \alpha_\nu^2 = \frac{2}{3}\left[(2k+1)^2 - 1\right], \qquad (8)$$

eine Relation, die wir später verwenden werden.

Von besonderem Interesse für uns ist weiterhin das Verhalten der Funktion $K(\theta)$ im Intervall

$$0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2\,(2k+1)}. \qquad (9)$$

Man stellt leicht fest, dass $K(\theta)$ dort monoton fällt. Ferner erhalten wir aus (7)

$$\log K(\theta) = \sum_{\nu=1}^{2k} \log \left(1 - \alpha_\nu^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right),$$

$$\log K(\theta) = -\sum_{\nu=1}^{2k} \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{\mu} \left(\alpha_\nu \sin \frac{\theta}{2}\right)^{2\mu}.$$

Nun konvergieren alle Reihen

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{\mu} \left(\alpha_\nu \sin \frac{\theta}{2} \right)^{2\mu}, \quad 1 \leq \nu \leq 2k$$

im Intervall (9), denn dort gilt

$$\frac{1}{\mu} \left(\alpha_\nu \sin \frac{\theta}{2} \right)^{2\mu} \leqq \frac{1}{\mu} \left(\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}} \right)^{2\mu}.$$

Wir können also schreiben

$$\log K(\theta) = -\sum_{\mu=1}^{\infty} \beta_\mu \sin^{2\mu} \frac{\theta}{2}, \quad \beta_\mu = \frac{1}{\mu} \sum_{\nu=1}^{2k} \alpha_\nu^{2\mu} \tag{10}$$

oder auch, wie es in unserem Fall zweckmässig ist,

$$\log K(\theta) = -\beta \sin^2 \frac{\theta}{2} - \sum_{\mu=2}^{\infty} \beta_\mu \sin^{2\mu} \frac{\theta}{2}, \; \beta = \beta_1. \tag{11}$$

Setzen wir

$$\beta \sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{\beta}{2} (1 - \cos \theta)$$

$$= \frac{\beta \theta^2}{4} + \frac{\beta}{2} \left(1 - \cos \theta - \frac{\theta^2}{2} \right),$$

so folgt weiter

$$\left| \log K(\theta) + \frac{\beta \theta^2}{4} \right| \leqq \frac{\beta}{2} \left| 1 - \cos \theta - \frac{\theta^2}{2} \right| + \sum_{\mu=2}^{\infty} \beta_\mu \sin^{2\mu} \frac{\theta}{2}. \tag{12}$$

Nach Entwicklung der Cosinusfunktion erhält man zunächst

$$1 - \cos \theta - \frac{\theta^2}{2} = -\frac{\theta^4}{4!} + \frac{\theta^6}{6!} - \frac{\theta^8}{8!} + - \ldots$$

und da

$$\theta^2 \leqq \frac{\pi^2}{4\,(2k+1)^2} < \frac{1}{3}$$

ist, kann folgende Abschätzung vorgenommen werden:

$$\left| 1 - \cos\,\theta - \frac{\theta^2}{2} \right| \leqq \frac{\theta^4}{24}\,(1 + \theta^2 + \theta^4 + \ldots)\,,$$

$$\left| 1 - \cos\,\theta - \frac{\theta^2}{2} \right| \leqq \frac{\theta^4}{16}\,. \tag{13}$$

Ferner erreicht man unter Berücksichtigung der Definitionsgleichung (10) für β_μ

$$\sum_{\mu=2}^{\infty} \beta_\mu \sin^{2\mu}\frac{\theta}{2} = \sum_{\mu=2}^{\infty} \frac{1}{\mu} \sum_{\nu=1}^{2k} \left(\alpha_\nu \sin\frac{\theta}{2}\right)^{2\mu}$$

und

$$\sum_{\mu=2}^{\infty} \beta_\mu \sin^{2\mu}\frac{\theta}{2} \leqq k \sum_{\mu=2}^{\infty} \left(\alpha_1 \sin\frac{\theta}{2}\right)^{2\mu}.$$

Durch Summation der geometrischen Reihe und nachfolgender Berücksichtigung der Ungleichungen

$$\alpha_1 \sin\frac{\theta}{2} \leqq \frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}\,,$$

sowie

$$\sin\frac{\theta}{2} \leqq \frac{\theta}{2}$$

erreicht man

$$\sum_{\mu=2}^{\infty} \beta_\mu \sin^{2\mu}\frac{\theta}{2} \leqq \frac{k\,\theta^4}{8 \sin^4 \frac{\pi}{2\,(2k+1)}}\,. \tag{14}$$

Verwenden wir die Abschätzungen (13) und (14) für (12), so folgt

$$\left| \log K(\theta) + \frac{\beta\theta^2}{4} \right| \leqq K\theta^4 ,$$

wo wir abkürzend

$$K = \frac{\beta}{32} + \frac{k}{8 \sin^4 \frac{\pi}{2(2k+1)}}$$

gesetzt haben. Somit ist also

$$K(\theta) = e^{-\frac{\beta\theta^2}{4} + \gamma K \theta^4}, \quad -1 \leqq \gamma \leqq 1$$

oder

$$K^n(\theta) = e^{-\frac{n\beta\theta^2}{4} + n\gamma K \theta^4}$$

und schliesslich

$$K^n(\theta) - e^{-\frac{n\beta\theta^2}{4}} = e^{-\frac{n\beta\theta^2}{4}} \left(e^{n\gamma K \theta^4} - 1 \right). \tag{15}$$

3. Nach den im vorangehenden Abschnitt durchgeführten Untersuchungen der Funktion $K(\theta)$ kehren wir zu unserer eigentlichen Aufgabe zurück, und zwar soll zunächst das Integral (4),

$$\chi_n(x) = \frac{2\sqrt{n}}{\pi} \int_{\frac{1}{\sqrt[4]{n}}}^{\frac{\pi}{2}} K^n(\theta) \cos 2 \left[\left[\sqrt{n}\, x + \frac{1}{2} \right] \right] \theta \cdot d\theta ,$$

abgeschätzt werden.

Nun gilt, wie sich einfach zeigen lässt,

$$K\left(\frac{\pi}{2(2k+1)} \right) \geqq K(\theta) , \quad \frac{\pi}{2(2k+1)} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$$

und deshalb auch

$$K\left(\frac{1}{\sqrt[4]{n}}\right) \geqq K(\theta)\,, \quad \frac{1}{\sqrt[4]{n}} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}\,.$$

Zufolge (11) ist aber

$$K\left(\frac{1}{\sqrt[4]{n}}\right) < e^{-\beta \sin^2 \frac{1}{2\sqrt[4]{n}}}$$

oder, indem wir nochmals vergrössern,

$$K\left(\frac{1}{\sqrt[4]{n}}\right) < e^{-\frac{\beta}{16\sqrt{n}}}\,.$$

Verwenden wir diese Abschätzung in (4), so folgt

$$|\chi_n(x)| < \sqrt{n}\; e^{-\frac{\beta}{16}\sqrt{n}}\,. \tag{16}$$

4. Nunmehr gelangen wir zur Berechnung von (3),

$$\psi_n(x) = \frac{2\sqrt{n}}{\pi} \int_0^{\frac{1}{\sqrt[4]{n}}} K^n(\theta)\, \cos 2\left[\!\left[\sqrt{n}\, x + \frac{1}{2}\right]\!\right] \theta \cdot d\theta\,.$$

Durch die Substitution $\theta = \dfrac{\vartheta}{\sqrt{n}}$ geht dieses Integral über in

$$\psi_n(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\sqrt[4]{n}} K^n\left(\frac{\vartheta}{\sqrt{n}}\right) \cos 2\left[\!\left[\sqrt{n}\, x + \frac{1}{2}\right]\!\right] \frac{\vartheta}{\sqrt{n}} \cdot d\vartheta$$

oder auch

$$\left.\begin{aligned}\psi_n(x) = {} & \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-\frac{\beta\vartheta^2}{4}} \cos 2\left[\!\left[\sqrt{n}\,x+\frac{1}{2}\right]\!\right]\frac{\vartheta}{\sqrt{n}}\cdot d\vartheta \\ & -\frac{2}{\pi}\int_{\sqrt[4]{n}}^{\infty} e^{-\frac{\beta\vartheta^2}{4}} \cos 2\left[\!\left[\sqrt{n}\,x+\frac{1}{2}\right]\!\right]\frac{\vartheta}{\sqrt{n}}\cdot d\vartheta \\ & \frac{2}{\pi}\int_0^{\sqrt[4]{n}}\left[e^{-\frac{\beta\vartheta^2}{4}} - K^n\!\left(\frac{\vartheta}{\sqrt{n}}\right)\right]\cos 2\left[\!\left[\sqrt{n}\,x+\frac{1}{2}\right]\!\right]\frac{\vartheta}{\sqrt{n}}\cdot d\vartheta .\end{aligned}\right\} \quad (17)$$

Dabei ist das erste Integral in (17)

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-\frac{\beta\vartheta^2}{4}} \cos 2\left[\!\left[\sqrt{n}\,x+\frac{1}{2}\right]\!\right]\frac{\vartheta}{\sqrt{n}}\cdot d\vartheta = \frac{2}{\sqrt{\beta\pi}}\, e^{-\frac{4}{n\beta}\left[\!\left[\sqrt{n}\,x+\frac{1}{2}\right]\!\right]^2}.$$

Setzen wir noch

$$\begin{aligned}\frac{4}{n\beta}\left[\!\left[\sqrt{n}\,x+\frac{1}{2}\right]\!\right]^2 &= \frac{4}{n\beta}\left(\sqrt{n}\,x+\frac{1}{2}-\gamma\right)^2 \\ &= \frac{4}{\beta}\left(x+\frac{1-2\gamma}{2\sqrt{n}}\right)^2,\end{aligned}$$

wo $0 \leqq \gamma < 1$ ist, so ergibt naheliegende Abschätzung der Differenz

$$\frac{2}{\sqrt{\beta\pi}}\left| e^{-\frac{4}{\beta}\left(x+\frac{1-2\gamma}{2\sqrt{n}}\right)^2} - e^{-\frac{4}{\beta}x^2}\right|$$

die Ungleichung

$$\left|\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-\frac{\beta\vartheta^2}{4}} \cos 2\left[\!\left[\sqrt{n}\,x+\frac{1}{2}\right]\!\right]\frac{\vartheta}{\sqrt{n}}\cdot d\vartheta - \frac{2}{\sqrt{\beta\pi}}\, e^{-\frac{4}{\beta}x^2}\right| < \frac{2\sqrt{2}}{\beta\sqrt{e\pi}\sqrt{n}}. \quad (18)$$

Für das zweite Integral erhalten wir

$$\left| \frac{2}{\pi} \int_{\sqrt[4]{n}}^{\infty} e^{-\frac{\beta \vartheta^2}{4}} \cos 2 \left[\!\left[\sqrt{n}\, x + \frac{1}{2} \right]\!\right] \frac{\vartheta}{\sqrt{n}} \cdot d\vartheta \right| < \frac{2}{\pi} \int_{\sqrt[4]{n}}^{\infty} e^{-\frac{\beta \vartheta^2}{4}} \cdot d\vartheta \quad (19)$$

und zur Abschätzung des dritten Integrals von (17) besitzen wir in der Relation (15) ein Hilfsmittel. Es ist nämlich

$$\left| \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\sqrt[4]{n}} \left[e^{-\frac{\beta \vartheta^2}{4}} - K^n \left(\frac{\vartheta}{\sqrt{n}} \right) \right] \cos 2 \left[\!\left[\sqrt{n}\, x + \frac{1}{2} \right]\!\right] \frac{\vartheta}{\sqrt{n}} \cdot d\vartheta \right|$$

$$\leqq \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\sqrt[8]{n}} e^{-\frac{\beta \vartheta^2}{4}} \left[e^{\frac{K \vartheta^4}{n}} - 1 \right] d\vartheta + \frac{2}{\pi} \int_{\sqrt[8]{n}}^{\sqrt[4]{n}} e^{-\frac{\beta \vartheta^2}{4}} \left[e^{\frac{K \vartheta^4}{n}} - 1 \right] d\vartheta$$

$$\leqq \frac{2}{\pi} \sqrt[8]{n} \left(e^{\frac{K}{\sqrt{n}}} - 1 \right) + \frac{2}{\pi} \sqrt[4]{n} \left(e^{K} - 1 \right) e^{-\frac{\beta}{4} \sqrt[4]{n}} .$$

Berücksichtigt man

$$\frac{2}{\pi} \sqrt[8]{n} \left(e^{\frac{K}{\sqrt{n}}} - 1 \right) = \frac{2K}{\pi \sqrt[8]{n^3}} \left(\frac{e^{\frac{K}{\sqrt{n}}} - 1}{\frac{K}{\sqrt{n}}} \right) < \frac{2K}{\pi \sqrt[8]{n^3}} e^{\frac{K}{\sqrt{n}}} ,$$

so folgt

$$\left| \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\sqrt[4]{n}} \left[e^{-\frac{\beta \vartheta^2}{4}} - K^n \left(\frac{\vartheta}{\sqrt{n}} \right) \right] \cos 2 \left[\!\left[\sqrt{n}\, x + \frac{1}{2} \right]\!\right] \frac{\vartheta}{\sqrt{n}} \cdot d\vartheta \right|$$

$$< \frac{2K}{\pi \sqrt[8]{n^3}} e^{\frac{K}{\sqrt{n}}} + \frac{2}{\pi} \sqrt[4]{n} \left(e^{K} - 1 \right) e^{-\frac{\beta \sqrt[4]{n}}{4}} . \quad (20)$$

5. Auf Grund der Formeln (5) und (17) und unter Zuhilfenahme der Abschätzungen (16), (18), (19) und (20) haben wir nun

$$\left| \varphi_{\sqrt{n}}[\varepsilon^n, x] - \frac{2}{\sqrt{\beta\pi}} e^{-\frac{4}{\beta}x^2} \right| < \sqrt{n}\, e^{-\frac{\beta}{16}\sqrt{n}} + \frac{2\sqrt{2}}{\beta\sqrt{e\pi}\sqrt{n}} +$$

$$+ \frac{2}{\pi} \int_{\sqrt[4]{n}}^{\infty} e^{-\frac{\beta\vartheta^2}{4}} d\vartheta + \frac{2K}{\pi \sqrt[8]{n^3}} e^{\frac{K}{\sqrt{n}}} + \frac{2}{\pi} \sqrt[4]{n}\,(e^K - 1)\, e^{-\frac{\beta}{4}\sqrt[4]{n}}$$

oder

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_{\sqrt{n}}[\varepsilon^n, x] = \frac{2}{\sqrt{\beta\pi}} e^{-\frac{4}{\beta}x^2}.$$

Ersetzen wir hierin noch $\frac{4}{\beta}$ nach Massgabe von (8) durch

$$h^2 = \frac{6}{(2k+1)^2 - 1}, \quad \text{so folgt}$$

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_{\sqrt{n}}[\varepsilon^n, x] = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2}, \; h^2 = \frac{6}{(2k+1)^2 - 1}.$$

§ 3.

Das asymptotische Verhalten der Polynomialkoeffizienten [1]).

Bevor wir zur Glättung der allgemeinen Reihe übergehen und für diese den Grenzübergang vollziehen, wenden wir das bisherige Ergebnis auf spezielle Polynomialkoeffizienten an. Es handelt sich um die Koeffizienten $P^n_{2k,\lambda}$ der Entwicklung einer Polynompotenz

$$(1 + \xi + \xi^2 + \ldots + \xi^{2k})^n = P^n_{2k,0} + P^n_{2k,1}\,\xi + P^n_{2k,2}\,\xi^2 + \ldots + P^n_{2k,2kn}\,\xi^{2kn}. \quad (1)$$

[1]) V. Brun: Gauß fordelingslov. Norsk Matematisk Tidskrift, 3. Heft, 1932.

Es gilt die Rekursionsformel

$$\left.\begin{aligned} P^0_{2k,0} &= 1\,, \\ P^n_{2k,\lambda} &= \sum_{\nu=0}^{2k} P^{n-1}_{2k,\lambda-\nu}\,. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Dabei ist $P^n_{2k,\lambda} = 0$ für $\lambda < 0$ und $\lambda > 2kn$ zu setzen.

Die Rekursionsformel (2) ist nichts anderes als die Rechenvorschrift für das verallgemeinerte Pascalsche Dreieck. Für den Spezialfall $k = 1$ und $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ erhalten wir das folgende Schema:

			1			
		1	1	1		
	1	2	3	2	1	
1	3	6	7	6	3	1

. . . . . .

Zur weitern Untersuchung müssen die Polynomialkoeffizienten normiert werden. Als Normierung bezeichnen wir die Division aller Polynomialkoeffizienten für ein vorgegebenes n und k durch ein und denselben Faktor so, dass sie der Bedingung

$$\sum_{\lambda=0}^{2kn} \bar{P}^n_{2k,\lambda} = 1$$

genügen. Offensichtlich ist

$$\bar{P}^n_{2k,\lambda} = \frac{P^n_{2k,\lambda}}{(2k+1)^n}\,,$$

was unmittelbar aus (1) folgt, wenn man $\xi = 1$ setzt. Die Rekursion für normierte Polynomialkoeffizienten lautet dann

$$\left.\begin{aligned} \bar{P}^0_{2k,0} &= 1\,, \\ \bar{P}^n_{2k,\lambda} &= \sum_{\nu=0}^{2k} \frac{\bar{P}^{n-1}_{2k,\lambda-\nu}}{2k+1} \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

und für den Fall $k = 1$ geht vorangehendes Schema über in

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & 1 & & & \\
 & & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & & \\
 & \frac{1}{3^2} & \frac{2}{3^2} & \frac{3}{3^2} & \frac{2}{3^2} & \frac{1}{3^2} & \\
\frac{1}{3^3} & \frac{3}{3^3} & \frac{6}{3^3} & \frac{7}{3^3} & \frac{6}{3^3} & \frac{3}{3^3} & \frac{1}{3^3}
\end{array}
$$

. . . . . .

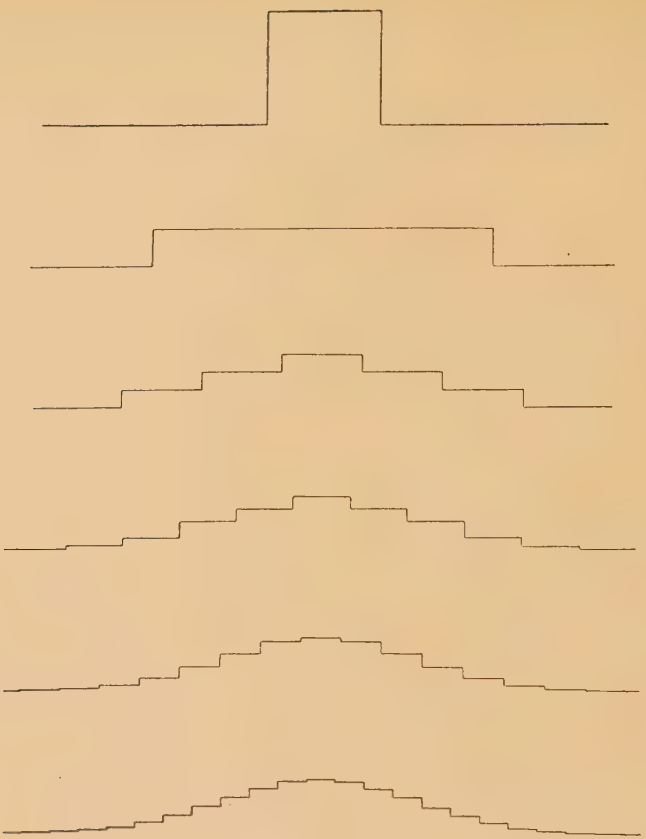
In diesem Falle ist die Summe durch die Mittelwerte ersetzt. Aus der Rekursion (3) folgt ohne weiteres die Identität der normierten Polynomialkoeffizienten mit den Gliedern der entsprechenden Glättung der in § 1 definierten Elementarreihe, d. h. es gilt

$$E_\lambda \equiv \overline{P}^0_{2k,\lambda} ,$$

$$E^n_\lambda \equiv \overline{P}^n_{2k,nk+1+\lambda} .$$

Aus den Untersuchungen des § 2 geht deshalb hervor, dass auch die die Polynomialkoeffizienten treppenförmig interpolierende Verteilungsfunktion bei der durch die Präzision $\omega = \sqrt{n}$ definierten Maßstabsänderung mit unendlich wachsendem Exponenten gleichmässig gegen die Gaußsche Verteilungsfunktion konvergiert.

Endlich haben wir in untenstehender Figur für den Spezialfall $k = 1$ die zur Elementarreihe zugeordnete Funktion $\varphi\,[\varepsilon, x]$, sowie die zu der ersten, zweiten, vierten, achten und sechzehnten Glättung zugeordneten Funktionen $\varphi_{\sqrt{n}}\,[\varepsilon^n, x]$, $n = 1, 2, 4, 8, 16$, dargestellt.



§ 4.

Die Glättung der allgemeinen normierten Verteilungsreihe.

Wir gelangen nun zur Glättung der allgemeinen normierten Verteiungsreihe

$$\alpha = \{A_\lambda\} .$$

Die zu ihrer n-ten Glättung zugeordnete Verteilungsfunktion haben wir in § 1 formal dargestellt durch die Reihe

$$\varphi_{\sqrt{n}}[\alpha^n, x] = \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} A_\lambda \varphi_{\sqrt{n}}\left[\varepsilon^n, x - \frac{\lambda}{\sqrt{n}}\right] .$$

Dabei gilt, infolge der gleichmässigen Konvergenz der Funktionenfolge $\varphi_{\sqrt{n}}[\varepsilon^n, x]$, $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ für alle n und alle x

$$0 \leqq \varphi_{\sqrt{n}}[\varepsilon^n, x] \leqq M,$$

wo M eine nicht näher bestimmte, feste Schranke bedeutet.

Es sei

$$s_i(x) = \sum_{\lambda=-i}^{i} A_\lambda \varphi_{\sqrt{n}}\left[\varepsilon^n, x - \frac{\lambda}{\sqrt{n}}\right]$$

und $l > i$. Dann gilt

$$s_l(x) - s_i(x) = \sum_{\lambda=-l}^{l} A_\lambda \varphi_{\sqrt{n}}\left[\varepsilon^n, x - \frac{\lambda}{\sqrt{n}}\right] - \sum_{\lambda=-i}^{i} A_\lambda \varphi_{\sqrt{n}}\left[\varepsilon^n, x - \frac{\lambda}{\sqrt{n}}\right]$$

oder

$$s_l(x) - s_i(x) = \sum_{\lambda=-l}^{-i} A_\lambda \varphi_{\sqrt{n}}\left[\varepsilon^n, x - \frac{\lambda}{\sqrt{n}}\right] + \sum_{\lambda=i}^{l} A_\lambda \varphi_{\sqrt{n}}\left[\varepsilon^n, x - \frac{\lambda}{\sqrt{n}}\right]$$

und

$$|s_l(x) - s_i(x)| \leqq M \left| \sum_{\lambda=-l}^{-i} A_\lambda + \sum_{\lambda=i}^{l} A_\lambda \right|.$$

$$|s_l(x) - s_i(x)| \leqq M \left| \sum_{\lambda=-l}^{l} A_\lambda - \sum_{\lambda=-i}^{i} A_\lambda \right|.$$

Wegen der Konvergenz der Reihe $\{A_\lambda\}$ gibt es zu einem beliebigen $\eta > 0$ ein $N = N(\eta)$ so, dass

$$|s_l(x) - s_i(x)| \leqq M \cdot \eta$$

für alle $l > i > N$ ist. Damit haben wir aber nachgewiesen, dass die Reihe

$$\varphi_{\sqrt{n}}[\alpha^n, x] = \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} A_\lambda \varphi_{\sqrt{n}}\left[\varepsilon^n, x - \frac{\lambda}{\sqrt{n}}\right]$$

für alle n gleichmässig konvergiert.

Jetzt können wir den Grenzübergang durchführen. Es ist

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_{\sqrt{n}}\,[\alpha^n, x] = \lim_{n\to\infty} \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} A_\lambda\, \varphi_{\sqrt{n}}\left[\varepsilon^n, x - \frac{\lambda}{\sqrt{n}}\right]$$

$$= \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} A_\lambda \lim_{n\to\infty} \varphi_{\sqrt{n}}\left[\varepsilon^n, x - \frac{\lambda}{\sqrt{n}}\right].$$

Wegen

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_{\sqrt{n}}\left[\varepsilon^n, x - \frac{\lambda}{\sqrt{n}}\right] = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\, e^{-h^2 x^2}$$

folgt sofort

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_{\sqrt{n}}\,[\alpha^n, x] = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\, e^{-h^2 x^2} \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} A_\lambda$$

und endlich

$$\underline{\lim_{n\to\infty} \varphi_{\sqrt{n}}\,[\alpha^n, x] = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\, e^{-h^2 x^2},}$$

wobei h^2 den Wert

$$h^2 = \frac{6}{(2k+1)^2 - 1}$$

besitzt.

Damit haben wir das anfangs in Aussicht gestellte Ergebnis bewiesen und gezeigt, dass die zur n-fach geglätteten statistischen Reihe α zugeordnete Verteilungsfunktion mit $n \to \infty$ gleichmässig gegen die Gaußsche Verteilungsfunktion konvergiert.

Lebenslauf.

Ich wurde geboren am 18. Mai 1913. In Unterseen und Wengen besuchte ich die Primarschule, anschliessend die Sekundarschule in Bern. 1929 trat ich in die Quarta des städtischen Realgymnasiums ein, wo ich im Herbst 1933 die Maturität bestand. Hierauf immatrikulierte ich mich an der hiesigen Universität, erwarb 1936 das Sekundarlehrer-Patent und wandte mich hernach versicherungsmathematischen, mathematischen und nationalökonomischen Studien zu.